EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta …036

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{2}-\sqrt{7}i$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(7, 2)$ și $C(11, 3)$.

(4p) **c)** Să se determine partea reală a numărului complex $z = i + i^4 + i^6 + i^{11}$.

(4p) **d)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(7, 2)$ și $C(11, 3)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(7, 2)$, $B(2, 2)$ și $C(11, 3)$.

(2p) **f)** Dacă $\sin x = \frac{4}{5}$ să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine elementul $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\ldots\cdot\hat{7}$ în $(\mathbf{Z}_8, \cdot)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $C_7^3 - C_7^4 + C_{10}^{10}$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_4 x = 2$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x = 32^x$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $5^n > 30$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 4x^3 - 5$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}+3}{7\sqrt{n}+2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $A=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\mid f(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0\}$,

$B=\{g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\mid g(x)=a_4x^4+a_3x^3+...+a_0,\quad a_4,a_3,...,a_0\in\mathbf{R}, a_4\neq 0\}$,

$C=\{u\circ v\mid u,v\in A\}$, unde “$\circ$” reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $u,v\in A$, atunci $u\circ v\in B$.

(4p) **b)** Să se verifice că dacă $f\in A$, $f(x)=ax^2+bx+c$, atunci

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-x\right),\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

(4p) **c)** Să se arate că funcția $s:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $s(x)=x^4$ este un element al mulțimii C.

(2p) **d)** Să se găsească o funcție $g\in B$ cu proprietatea $g(1-x)=g(1+x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=x^4+x+1$ are proprietatea că $\forall a\in\mathbf{R}$, există $x\in\mathbf{R}$ astfel încât $h(a-x)\neq h(a+x)$.

(2p) **f)** Utilizând relația de la punctul **b)**, să se arate că dacă $w\in C$, atunci există $c\in\mathbf{R}$, astfel încât $w(c-x)=w(c+x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că mulțimea $B-C$ este nevidă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ şi $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$F(x)=1+\int_0^x f(t)dt$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se verifice identitatea $F(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $(x-1)F(x)=x^5-1$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $F(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se arate că funcția F este convexă pe $\mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot f(n)}{F(n)}$.

(2p) **g)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x^3)=1$.